Leçon n° 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

I/ Formes linéaires et espace dual.

A/ Généralités sur les formes linéaires. [ROM] [G]

Définition 1 : Forme linéaire et E^*.

Exemple 2 : Les projections sont des formes linéaires.

Exemple 3 : $A \mapsto \mathrm{Tr}(AM)$ où $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est une forme linéaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 4 : Le noyau d'une forme linéaire est un hyperplan et réciproque.

Proposition 5 : Si l_1 et l_2 deux formes linéaires telles que $\mathrm{Ker}(l_1) \subset \mathrm{Ker}(l_2)$ alors l_1 et l_2 sont proportionnelles.

B/ Espace dual et base duale. [ROM] [G]

Proposition 6 : $\dim(E^*) = \dim(E)$ et base duale.

Exemple 7 : Base duale de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et base duale de la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

Théorème 8 : Théorème de représentation de Riesz en dimension finie.

Application 9 : Isomorphisme canonique entre E et E^* si E euclidien via $x \mapsto \langle x, \cdot \rangle$.

Développement 1.a)

Proposition 10 : $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})^*$.

C/ Bidual et bases antéduales. [ROM] [G]

Proposition 11 : Isomorphisme entre E et E^{**}.

Remarque 12 : C'est un isomorphisme canonique car ne dépend pas de la base choisie.

Proposition 13 : Existence et unicité de la base antéduale.

Remarque 14 : Nous verrons un moyen par la suite de la calculer en pratique.

II/ Orthogonalité.

A/ Notions d'orthogonalités. [G]

Définition 15 : $X^\perp$ et Y°.

Remarque 16 : Si $\varphi \in E^*$ alors $\{\varphi\}^\circ = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Proposition 17 : Si $A \subset B$ alors $B^\perp \subset A^\perp$ et toutes les autres propriétés.

Proposition 18 : $\dim(F^\perp) + \dim(F) = \dim(E)$ et pareil pour le rond.

Proposition 19 : Prop $\perp$ et $\circ$ pour $\cap$ et $+$.

Théorème 20 : Lien entre intersections d'hyperplans et sev de dimension donnée.

Application 21 : Système d'équations pour un sev, par la méthode du pivot de Gauss on peut à partir d'un sev trouver ces équations et donc les formes linéaires associées.

B/ Transposée d'une application linéaire. [G]

Définition 22 : Application transposée.

Proposition 23 : Propriétés sur l'application transposée.

Proposition 24 : Composition.

Proposition 25 : F stable par $u \iff F^\perp$ stable par ${}^t u$.

Remarque 26 : Utile pour des démonstrations par récurrence se faisant sur la dimension.

Proposition 27 : Vision matricielle.

Proposition 28 : Si M matrice dont les colonnes sont les vecteurs de la base duale $\mathcal{B}^*$ alors ${}^t M^{-1}$ a pour colonnes les vecteurs de la base antéduale $\mathcal{B}$.

III/ Applications de la dualité.

A/ Application à la réduction. [ROM]

Développement 2

Théorème 29 : Réduction de Jordan pour les nilpotents.

Corollaire 30 : Réduction de Jordan dans le cas général.

B/ Convexité. [OBJ] [ZQ]

Lemme 31 : Carathéodory.

Développement 1.b)

Lemme 32 : Lemme de séparation d'un point et d'un convexe fermé.

Application 33 : Enveloppe convexe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

C/ Application en calcul différentiel. [PGCD] [OBJ]

Proposition 34 : Application différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, la différentielle est une forme linéaire et définition gradient.

Exemple 35 : La norme est différentiable sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Théorème 36 : Théorème des extrema liés.

Application 37 : Théorème spectral.

Références :

- [G] Gourdon Algèbre p. 126-134
- [ROM] Rombaldi Algèbre et géométrie 2nd éd. p. 441-454 et p. 681
- [OBJ] Beck, Malick Peyré Objectif Agrégation p. 20-21 et p. 97
- [ZQ] Zuily-Queffeléc p. 205
- [PGCD] Rouvière Petit Guide du Calcul Différentiel p. 43